(oder Neumark)

§5 Der (erste) Satz von Gelfand-Naimark

Wir wollen in diesem Abschnitt kommutative C^*-Algebren untersuchen.

5.1 Definition (1) Sei A eine $\mathbb{C}$-Algebra. Eine Involution auf A ist eine Abb. $*: A \to A$, $a \mapsto a^*$ mit: $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ sowie $(a^*)^* = a$ $\forall a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Wir nennen dann $(A, *)$ eine $*$-Algebra.
(2) Ist A eine Banachalgebra mit Involution $*: A \to A$, sodass zusätzlich für alle $a \in A$ gilt, dass $\|a^*\| = \|a\|$, so heißt $(A, *)$ eine Banach-$*$-Algebra.
(3) Eine Banach-$*$-Algebra heißt C^*-Algebra, wenn zusätzlich für alle $a \in A$: $\|a^* a\| = \|a\|^2$ gilt.

5.2 Bsp (1) $C_0(X)$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ und $f^* := \bar{f}$ ist eine C^*-Algebra.
(2) Sei $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1)$ wie in Blatt 2. Für $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ def. wir $f^*(n) := \overline{f(-n)}$. Dann ist $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1, *)$ ein Banach-$*$-Algebra:
Es gilt

$$(f*g)^*(n) = \overline{f*g(-n)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{f(m) g(-n-m)} \overset{m \mapsto -m}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{f(-m) g(-(n-m))}$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f^*(m) g^*(n-m) = f^* * g^*(n) \underset{\text{kommut.}}{=} g^* * f^*(n).$$

und $$\|f^*\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\overline{f(-n)}| \overset{n \mapsto -n}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| = \|f\|_1.$$

Aber: $\ell^1(\mathbb{Z})$ ist keine C^*-Algebra, denn z.B. gilt für $f = \delta_0 + i\delta_1 + i\delta_{-1}$ mit $\delta_n(m) = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$,

dann $\|f^* * f\|_1 = 3$ aber $\|f\|_1^2 = 9$ (ausrechnen!)
[$f = \delta_0 + i(\delta_1 + \delta_{-1}) \Rightarrow f^* = \delta_0 - i(\delta_{-1} + \delta_1)$, und damit
$f^* * f = \delta_0^2 - (\delta_1 + \delta_{-1})^2 = \delta_0 - \delta_1^2 - 2\delta_1\delta_{-1} - \delta_{-1}^2$
$= -\delta_0 - \delta_2 - \delta_{-2}$ (da $\delta_n * \delta_m = \delta_{n+m}$ $\forall n,m \in \mathbb{Z}$)]

(3) Sei H ein Hilbertraum und für $T \in L(H)$ sei $T^* \in L(H)$ der zu T adj. Operator, dh es gilt
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall x,y \in H.$$
Dann ist $(L(H), *)$ eine C^*-Algebra. Denn: $\forall x \in H$ gilt:
$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \overset{C-S}{\le} \|T^*Tx\|\|x\| \le \|T^*T\|_{op}\|x\|^2,$$
also folgt $\|T\|_{op}^2 \le \|T^*T\|_{op} \le \underbrace{\|T^*\|_{op}}_{=\|T\|_{op}\ (FA)}\|T\|_{op} = \|T\|_{op}^2$

5.3 Satz Sei A eine C^*-Algebra ohne $\mathbb{1}$. Dann ex. eine Norm auf A^1, die A^1 bezüglich der Involution $(a,\lambda)^* := (a^*, \bar{\lambda})$ zu einer C^*-Algebra macht, so dass $\|(a,0)\| = \|a\|$ für alle $a \in A$ gilt.
[Die Norm ist äquivalent zur BA-Norm $\|(a,\lambda)\|_1 = \|a\| + |\lambda|$, aber nicht gleich!]

Bew: Wir betrachten die Abb. $\Lambda : A^1 \to L(A)$ def durch
$\Lambda_{(a,\lambda)}(b) = (a,\lambda)b \ (= ab + \lambda b)$.
Es ist leicht zu sehen, dass Λ ein Algebra-Homom.
Beh: Λ ist injektiv?
Sei dazu $(a,\lambda) \in A^1$ mit $ab + \lambda b = 0$ $\forall b \in A$.
Ist $\lambda = 0$, so folgt auch $aa^* = 0$, also $a = 0$, da $\|a\|^2 = \|a^*\|^2 = \|aa^*\| = 0$.
Ist $\lambda \neq 0$, so folgt $-\frac{1}{\lambda}ab = b$ $\forall b \in A$. Damit ist $e := -\frac{1}{\lambda}a$ eine Linkseins in A. Dann folgt

für alle $c, b \in A_{\geq b}$:
$(ce-c)b = c(eb) - cb = 0$, also auch
$(ce-c)(ce-c)^* = 0$ und dann $ce - c = 0$,
d.h. es gilt $ce = c$ und e ist ein Eins in A.
Das ist ein Widerspruch zu A ohne Eins ?!

Setze nun $\|(a,\lambda)\| := \|\Lambda_{(a,\lambda)}\|_{op}$. Dann gilt zunächst
$\|(a,0)\| = \|a\| \; \forall a \in A$, denn wegen
$\|\Lambda_{(a,0)}(b)\| = \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ gilt $\|(a,0)\| \leq \|a\|$,
und ist $a \neq 0$, so gilt wegen $\|\Lambda_{(a,0)}(\frac{1}{\|a\|}a^*)\| = \frac{1}{\|a\|}\|aa^*\|$
$= \|a\|$ auch $\|(a,0)\| \geq \|a\|$.

Zeige nun $\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| = \|(a,\lambda)\|^2$ für alle $(a,\lambda) \in A^1$ $(a,\lambda) \neq 0$.
Sei dazu $\varepsilon > 0$ fest und sei $b \in A$ mit $\|b\| = 1$ und
$\|ab - \lambda b\| = \|\Lambda_{(a,\lambda)}(b)\| \geq \|(a,\lambda)\|(1-\varepsilon)$.
Dann folgt:
$(1-\varepsilon)^2\|(a,\lambda)\|^2 \leq \|ab - \lambda b\|^2 \overset{A\ C^*\text{-Alg}}{=} \|(ab-\lambda b)^*(ab-\lambda b)\|$
$= \|(b^*,0)(a^*,\bar\lambda)(a,\lambda)(b,0)\| \leq \underbrace{\|b^*\|}_{=1} \|(a^*,\bar\lambda)(a,\lambda)\| \underbrace{\|b\|}_{=1}$
$= \|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\|$
Da $\varepsilon > 0$ bel. folgt nun
$\|(a,\lambda)\|^2 \overset{(*)}{\leq} \|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| \overset{(**)}{\leq} \|(a,\lambda)^*\|\|(a,\lambda)\|$
ersetzen wir (a,λ) durch $(a,\lambda)^* = (a^*,\bar\lambda)$, so
folgt auch $\|(a,\lambda)^*\| \leq \|(a,\lambda)\|\|(a,\lambda)^*\|$
Damit folgt dann $\|(a,\lambda)^*\| = \|(a,\lambda)\|$ und
Gleichheit bei $(*)$ und $(**)$.

Es bleibt zu zeigen, dass A^1 vollständig ist.
Sei dazu (a_n,λ_n) eine Cauchy-Folge in A^1.
Dann ist $(\lambda_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $A^1/A \cong \mathbb{C}$
bzgl. d. Quot.-Norm (da $A \hookrightarrow A^1$ isometr. und

A vollständig, ist A abg. in A^1). Damit gilt $\lambda_n \to \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist aber auch $(a_n, 0) = (a_n, \lambda_n) - (0, \lambda_n)$ eine Cauchy-Folge in $(A, 0) \cong A$. Da A vollst. ex. $a \in A$ mit $a_n \to a$, und damit gilt $(a_n, \lambda_n) \to (a, \lambda)$. ∎

5.4 <u>Bemerkung</u> (1) Sind A, B C^*-Algebren, so ist $A \oplus B$ versehen mit komponentenweiser Addition, Multiplikation und Involution und mit

$$\|(a,b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$$

wird ein C^*-Algebra.

(2) Ist A eine <u>unitale</u> C^*-Algebra, so ist

$$A^1 \cong A \oplus \mathbb{C} \quad \text{vermöge} \quad (a, \lambda) \mapsto (a + \lambda 1_A, \lambda).$$

$\mathbb{C}$ ist C^*-Alg bzgl. $|\cdot|$ und $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$. Also wird A^1 ein C^*-Algebra bzgl. der Norm

$$\|(a,\lambda)\| := \max\{\|a + \lambda 1_A\|, |\lambda|\}$$

und es gilt auch hier, dass $\|(a,0)\| = \|a\|$ $\forall a \in A$.

<u>Fazit</u>: Wir können <u>immer</u> A^1 als C^*-Algebra auffassen wenn A eine C^*-Algebra ist.

5.5 <u>Bezeichnung</u>: Sei A eine $*$-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt <u>selbstadjungiert</u> wenn $a = a^*$ gilt. Wegen $(a^*a)^* = a^*(a^*)^* = a^*a$ ist a^*a für alle $a \in A$ selbstadjungiert.

5.6 <u>Satz</u> Sei A eine C^*-Algebra und sei $a \in A$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\|a\| = \rho(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}.$$

<u>Beweis</u>: Durch Übergang auf $\tilde{A}$ können wir o.B.d.A annehmen, dass A unital ist.

($\tilde{A} = A^1$ wenn A ohne 1 und $\tilde{A} = A$ sonst).

Da $a = a^*$ gilt $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$, und mit Induktion nach n folgt dann auch

$$\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mit der Spektralradiusformel folgt dann

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|. \quad \blacksquare$$

<u>Beachte</u>: Für bel. $a \in A$ folgt aus 5.6:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \rho(a^*a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a^*a)\}.$$

Damit ist die Norm auf A <u>vollständig</u> durch die $*$-algebraische Struktur von A festgelegt!

<u>5.7 Folgerung</u>: Ist A eine $*$-Algebra, so gibt es <u>höchstens eine</u> Norm, die A zu einer C^*-Algebra macht!

<u>5.8 Folgerung</u>: Sei A eine Banach-$*$-Algebra und sei B eine C^*-Algebra. Dann ist <u>jeder</u> $*$-Homom. $\phi: A \to B$ normfallend (insb. stetig), d.h. es gilt $\quad \|\phi(a)\| \leq \|a\| \quad \forall a \in A$.

<u>Bew</u>: Wegen $\sigma_B(\phi(a)) \overset{(*)}{\subseteq} \sigma_A(a)$ (3.10) gilt für alle $a \in A$:

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a)^*\phi(a)\| = \|\phi(a^*a)\| = \rho_B(\phi(a^*a)) \overset{(*)}{\leq} \rho_A(a^*a) \overset{3.5}{\leq} \|a^*a\| \leq \|a\|^2. \quad \blacksquare$$

Wir kommen nun zurück zu kommut. Algebren.

<u>5.9 Definition</u> Sei A eine kommutat. Banach-$*$-Alg. Dann heißt A <u>symmetrisch</u>, falls für alle $\chi \in \hat{A}$, $a \in A$ gilt: $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$.

5.10 Bsp: (1) $C_0(X)$ ist symmetrisch, denn $\widehat{C_0(X)} = \{\delta_x \mid x \in X\}$ mit $\delta_x(f) = f(x)$, und dann folgt $\delta_x(\bar{f}) = \overline{f(x)} = \overline{\delta_x(f)}$ $\forall x \in X, f \in C_0(X)$.

(2) $\ell^1(\mathbb{Z})$ mit $f^*(n) = \overline{f(-n)}$ ist symmetrisch, denn nach Blatt 3 gilt $\mathbb{T} \cong \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$ vermöge $z \mapsto \chi_z$ mit $\chi_z(f) = \hat{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) z^n$

und es gilt $\underline{(\bar{z} = z^{-1} \text{ für } z \in \mathbb{T})}$

$$\chi_z(f^*) = \widehat{f^*}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(n) z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f(-n)}\, z^n \overset{\downarrow}{=} \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)\, z^{-n}}$$
$$\overset{n \mapsto -n}{=} \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) z^n} = \overline{\chi_z(f)}.$$

(3) Sei A die Diskalgebra wie in Blatt 2, Aufg. 1. Dann wird durch $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ eine Involution auf A definiert die nicht symmetrisch ist!

[Es gilt $\hat{A} \cong D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ vermöge $z \mapsto \chi_z$ mit $\chi_z(f) = f(z)$, und dann gilt $\chi_z(f^*) = f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$.
Für $f = id_D$ folgt $id_D^* = id_D$, also $\chi_z(id_D^*) = z = \chi_z(id_D)$ $\neq \overline{\chi_z(id_D)}$ wenn $z \notin \mathbb{R}$.]

5.11 Bez. Ist A eine $*$-Algebra und ist $a \in A$, so setzen wir

$$\mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad \mathrm{Im}(a) = \frac{1}{2i}(a - a^*)$$

Dann gilt: $\mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Im}(a)$ sind selbstadjungiert (z.B. $\mathrm{Im}(a)^* = \left(\frac{1}{2i}(a - a^*)\right)^* = -\frac{1}{2i}(a^* - a) = \mathrm{Im}(a)$).
und es gilt $a = \mathrm{Re}(a) + i\,\mathrm{Im}(a)$

Wir können also jedes $a \in A$ in selbstadj. Realteil und Imaginärteil "zerlegen"!

Damit folgt: Eine Banach-$*$-Alg. ist symmetrisch g.d.w. für alle $a \in A$ mit $a = a^*$ gilt: $\chi(a) \in \mathbb{R}$ $\forall \chi \in \hat{A}$. (Einsetzen!)

5.12 Satz Jede kommutative C^*-Algebra ist symmetrisch.

Beweis Durch Übergang auf A^1 (wenn nötig) können wir o.B.d.A annehmen, dass A unital. Sei dann $\chi \in \hat{A}$ und $a \in A$ mit $a = a^*$.

Zeige: $\chi(a) \in \mathbb{R}$.

Sei dazu $\chi(a) = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige: $y = 0$.

Dazu setze $a_t := a + it1$, $t \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:
$$a_t^* a_t = (a + it1)^*(a + it1) = (a - it1)(a + it1) = a^2 - t^2 1$$

Ferner gilt $\chi(a_t) = \chi(a) + it = x + i(y + t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dann folgt $\forall t \in \mathbb{R}$:
$$x^2 + (y+t)^2 = |\chi(a_t)|^2 \overset{\|\chi\| \leq 1}{\leq} \|a_t\|^2 \overset{C^*\text{-Bed}}{=} \|a_t^* a_t\| = \|a^2 - t^2 1\| \leq \|a^2\| + t^2 \quad (\text{da } \|1\| = 1, \text{ s.u.})$$

Damit gilt: $x^2 + y^2 + 2yt \leq \|a^2\|$ $\underline{\forall t \in \mathbb{R}}$.

Das geht nur, wenn $y = 0$. ∎

Wir kommen nun zum zentralen Satz in diesem Abschnitt. Wir erinnern dazu an den Satz von Stone-Weierstrass: Sei X lokalkompakter T_2-Raum und sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine Unteralgebra, die streng die Punkte von X trennt (d.h. $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ ex. $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$ und für alle $x \in X$ ex. $g \in \mathcal{A}$ mit $g(x) \neq 0$) und für die gilt: $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$.
Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Erinnerung: Ist A kommut. BA, so ist der Gelfand-Homom. $\wedge : A \to C_0(\hat{A})$; $a \mapsto \hat{a}$ def. durch $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$

5.13 Satz (Gelfand-Naimark I)
Sei A eine symmetrische kommutative Banach-$*$-Algebra. Dann ist $\wedge(A) = \{\hat{a} \mid a \in A\}$ dicht in $C_0(\hat{A})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Ist A eine kommutative C^*-Algebra, so ist
$$\wedge : A \to C_0(\hat{A}),\ a \mapsto \hat{a}$$
ein isometrischer $*$-Isomorphismus.

Bew: Ist A symmetrisch, so gilt
$$\widehat{a^*}(\chi) = \chi(a^*) = \overline{\chi(a)} = \overline{\hat{a}(\chi)},$$
und damit ist $\wedge : A \to C_0(\hat{A})$ ein $*$-Homom.
Insbesondere ist $\wedge(A) \subseteq C_0(\hat{A})$ eine $*$-Unteralg.
(also $f \in \wedge(A) \Rightarrow \bar{f}$ in $\wedge(A)$).
Zeige: $\wedge(A)$ trennt streng die Punkte von $\hat{A}$.
Dann folgt die erste Aussage mit Stone-Weierstrass.
Zunächst gilt: Ist $\chi \in \hat{A}$, so ex. ein $a \in A$ mit $\hat{a}(\chi) = \chi(a) \neq 0$ (da $\chi \neq 0$ nach Def. von $\hat{A}$).
Sind $\chi, \mu \in \hat{A}$ mit $\chi \neq \mu$, so ex. ein $a \in A$ mit $\chi(a) \neq \mu(a)$, also $\hat{a}(\chi) \neq \hat{a}(\mu)$.
Also gilt $\wedge(A)$ dicht in $C_0(\hat{A})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Sei nun A eine C^*-Algebra. Dann gilt
$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \overset{5.6}{=} \rho(a^*a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a^*a)\}.$$
Nach 4.13 (3) gilt
$$\sigma(a^*a) = \sigma_{A^1}(a^*a) = \{\widehat{a^*a}(\chi) \mid \chi \in \hat{A^1}\} = \{\widehat{a^*a}(\chi) \mid \chi \in \hat{A}\} \cup \{0\},$$
also folgt
$$\|a\|^2 = \rho(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\bar{\hat{a}}\hat{a}\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2$$
und dann auch $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$.
Damit ist $\wedge(A) \cong A$ vollst. TR in $C_0(\hat{A})$ und es

folgt auch $\Lambda(A) = \overline{\Lambda(A)} = C_0(\hat{A})$. ∎

<u>Fazit</u>: Jede kommutative C^*-Algebra ist isometrisch isomorph (via Gelfand-Homom.) zu $C_0(X)$ für den lokalkompakten Raum $X = \hat{A}$. Es gilt dann

$$A \text{ unital} \iff X = \hat{A} \text{ ist kompakt und } A \cong C(X).$$